858. "Einreihig" 並ビ＝ Generalized "einreihig" Ring ＝ツイテ

中山　正（阪大）

On Frobeniusean algebras, I（アナルス, 40）及ビ II（近刊）ニツイテノ補足的注意ヲ一ニシタイト思ヒマス。ソコデ Frobeniusean ring ノ一般論ノ應用トシテ次ノコトヲ證明シマシタ（I, 定理10; II, 定理16）:

定理1　環Aニオイテ如何ナル両側いでやる $\mathfrak{J}$ モ（principal デ）$\mathfrak{J}=Ac=cA$ ナル形ニカケルナラバ，Aノ如何ナル剰餘環モふろべにうす的（Frobeniusean）デアル。（逆モ成立）

但シコヽデ，マタ以下スベテ，環ト云フノハ両方ノ連鎖律ヲ充スモノトスル．ふろべにうす環ノ一般ノ定義ハ一寸面倒（II, Chap. ii）デスが、特ニ多元環ノ場合ニハ右ト左ノ二ツノ正規表現が同値ナ（ソシテ主單位元ヲモツ）コトデアリマス。

然ルニ淺野氏ハ Über verallgemeinerte Abelsche Gruppe ……（輯報, 15）デ

定理2　環Aニ於テスベテノ両側いでやる $\mathfrak{J}$ が $\mathfrak{J}=Ac=dA$（cハdト異ッテヨイ）ト表ハセルナラバ，AハKötheノ意味デ einreihig デアル§.（逆モ勿論成立）。

ヲ証明サレタ。 $\boxed{einreihig}$ ナ環ト 先ヅ

a) primär ナ環ノ直和ニ分解サレ，且ツ

b) primitive ナ巾等元 e デ作ラレタ右及ビ左いでやる eA, Ae ガ常ニタダ一ツノ組成列ヲモツ如キモノデアリマス。(G. Köthe, Zeitschr. 39)

表面上大分異ッテ居リマスガ実ハ上ノ 1, 2 ハ実ハ同ジ事実ニ帰スルノデアリマス。即チ私ノハ浅野サンノ定理ノ別証明ヲ与ヘタコトニナリマス。(コノ定理ダケヲ問題ニスレバ長スギル別証明デスガ。) ソレハ先ヅスベテノ剰餘環がふろべにうす的トイフコトト、einreihig デアルコトガ一致スルノハふろべにうす環ノ構造論カラ容易ニ判リマスカラ、ソレハ今略シマス。

ソシテ浅野サンノ弱イ條件カラ私ノ強イノガ直チニ出ルコトヲ<u>辯解</u>（逆ヲ問題ニスル時ハ矛解デハナイデセウガ）サセテイタダキマス。即チ次ノ様ナ一寸面白イ事（或ヒハ既ニヨク知ラレタコトダッタカモ知レマセンガ）ガアリマス。

$\boxed{補題}$ 環（両連鎖律ヲミタス）A ガ主単位元ヲモットシ，ソノアル両側いでやる $\mathfrak{z}$ ガ $\mathfrak{z}=Ac=\alpha A$ ナル形デ表セレバ $\mathfrak{z}=cA=A\alpha$ デモアル。

$\boxed{証明}$ ハ単ニ組成列ノ計算ニヨリマス。今 A ノ左加群 $\mathfrak{m}$ ノ組成列ノ長サヲ $[\mathfrak{m}]$ デアラハス。$a \longrightarrow ac$ $(a \in A)$ ナル對應カラ容易ニ $\mathfrak{z}=Ac$（左いでやるトシテ）ガ $A/\mathfrak{l}(c)$ $=A/\mathfrak{l}(cA)$ ト同型ニナル。タダシ $\mathfrak{l}(*)$ ハ $*$ ニ左カラ乗

ジテ 0 ニナル (Aノ) 元全体ノナス左イデアルトスル。シカルニ $cA \subseteqq \mathfrak{z}$ ナルコトハ明カデアリマスカラ、$l(cA) \geqq l(\mathfrak{z})$.
ヨッテ結局

$$[\mathfrak{z}] \leqq [A/l(\mathfrak{z})]$$

ナル式ヲ得ル。他方，$a \longrightarrow ad$ ニヨッテ判ル如ク Ad ハ $A/l(dA) = l/l(\mathfrak{z})$ ニ同型ニナル。シカルニ $Ad \subseteqq \mathfrak{z}$.
ヨッテ

$$[\mathfrak{z}] \geqq [Ad] = [A/l(\mathfrak{z})]$$

二ツノ不等式ヲ比ベレバスベテノ等号、特ニ $[\mathfrak{z}]=[Ad]$，ヨッテ $\mathfrak{z}=Ad$ デナケレバナラヌ事ガ判ル。

同様ニシテ $\mathfrak{z}=cA$.

次ニ $\boxed{\text{generalized “einreihig” ring}}$ ニツイテノ注意ヲ一ツ。Gen. “einreihig” ring ハ einreihig ノ拡張トシテ前出ノ條件ノ a), b) ノ中. 少シ強引スギル a) ヲ除イテ、b) ダケヲ假定シタモノ（タダシ主単位元ノ存在ハヤハリ假定）トシテ導入シマシタ。然モ Köthe ノ $\boxed{\text{主定理}}$ デアッタ所ノ “イカナル左加群モ cyclic デシカモ Ae（e ハ primitive ナ巾等元）ト homomorphic ニナルヤウナ加群ノ直和ニ分解サレル” トイフコトガ保持サレテヰルコトヲ証明シマシタ（多元環ニツイテハ I, 定理11, 一般ニツイテハ II, 定理17）。右加群ニツイテモ勿論同様ノ性質ガアリマス。然モ（左, 右両方同時ニトレバ）ソノ逆モ成立シマス。ソノコトハ多元環ニツイテハ既ニ II ノ最後ニ一寸注意シテオキマシタガ，實

ハ一般ノ場合デモヨイコトニ氣付キマシタ。ソノ証明ノ大略ヲ述ベマス。

先ヅAガ上記ノ性質，特ニイカナル直既約ノ左加群モ Ae（eハ適當ナ primitive idempotent）ニ homomorphic，同様ニイカナル直既約右加群モ eA ニ homomorphic トイフ性質ヲモツトスル。（Ae, eA ニ homomorphic トイフ代リニ唯一ツノ maximal ナ部分加群ヲ有ツト云ツテモヨイ）。

然ルトキAガ Gen. einreihig ナルコトヲ云ヒタイノデアルガ、ソレニハ如何ナル primitive idempotent e' ヲトッテモ Ae' ガタゞ一ツノ組成列ヲモツ事、即チ $N^{i-1}e/N^{i}e$ ナル剰餘加群ガ常ニ（0デナケレバ）單純ナルコト及ビ右加群ニ對スル同様ノコトヲイヘバヨイ。タゞシ茲ニ NハAノ Radical トスル。

假リニソウデナイトシテ、アル一ツノ i ニツイテ $N^{i-1}e'/N^{i}e'$ ナル完全可約加群ガ二ツ以上ノ單純加群ニワカレルトシ、ソノ任意ノ二ツ m_1, m_2 ヲトル。更ニココデ i ハ上ノ如キ事ノオコル最初ノモノトシテオク。從ッテ $N^{j-1}e'/N^{j}e'$（$j<i$）ハスベテ單純デアルトスル。（コノ假定ノ下ニ $N^{i-1}e'/N^{i}e'$ ガ $Ae'/N^{i}e'$ ノ最大完全可約部分群ナルコトガ容易ニ分ル）。

1) $m_1 \neq m_2$ ノ場合。二ツノ primitive ナ巾等元 e_1, e_2 ヲ $m_1 \cong Ae_1/Ne_1$, $m_2 \cong Ae_2/Ne_2$ ナル如クトル。而シテ新ニ二ツノ右加群

$$\mathfrak{n}_1 = e_1 A / e_1 N^i, \quad \mathfrak{n}_2 = e_2 A / e_2 N^i$$

ヲ考ヘル．$\mathfrak{m}_1 \cong Ae_1/Ne_1$ カラ $e_1 N^{i-1} e' \neq N^i$，ヨッテ $\mathfrak{n}_1$ ノ完全可約約群 $e_1 N^{i-1}/e_1 N^i$ ノ中＝ $e'A/e'N$ ト同型ナ単純約群ガ少クモ一ツ存在スル．ソレヲ σ_1 トスル．同様＝ $\mathfrak{n}_2$ ハ $e'A/e'N$ ト同型ナ単純君羊 σ_2 ヲ含ム。ソコデ今 σ_1 ト σ_2 ヲ *identify* シテ（$\sigma_1 \cong \sigma_2$ ナルコト＝注意），新＝一ツノ右加群 $\mathfrak{n}$ ヲ得ル：

$$\mathfrak{n} = (\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2), \quad \mathfrak{n}_1 \cap \mathfrak{n}_2 = \sigma_1 = \sigma_2$$

シカルトキコノ $\mathfrak{n}$ ガ<u>直既約＝ナル</u>ノデアル。然シソノ証明ハ一寸面倒（但シ要スル＝簡単ナ群論的考察）ダカラ省略シマス。

他方 $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}N$ ガ単純デナイコトカラ $\mathfrak{n}$ ハ決シテ *primitive* ナ巾等元デ作ラレタ右いでやる＝ *homomorphic* ＝ナリ得ナイ。ヨッテコノ Case 1) ハ排除サレネバナラヌ。

2) $\mathfrak{m}_1 \cong \mathfrak{m}_2$ ノ場合。今 $\mathfrak{m} = Ae'/N^i e'$（$\supseteq \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$）トオキ更＝他＝モウ一ツコレト同型ナ群 $\mathfrak{m}^*$ ヲ考ヘル．而シテ $\mathfrak{m}^*$ ＝於テ $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ ＝對應スル部分加群ヲ $\mathfrak{m}_1^*$。$\mathfrak{m}_2^*$ トスル．シカルトキ $\mathfrak{m}_2$ ト $\mathfrak{m}_1^*$ トヲ *identify* シテ（*suffix* ＝注意!!）一ツノ新シイ加群 $\widehat{\mathfrak{m}}$ ヲツクル。

$$\widehat{\mathfrak{m}} = (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}^*), \quad \mathfrak{m} \cap \mathfrak{m}^* = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_1^*$$

シカラバコノ左加群 $\widehat{\mathfrak{m}}$ ガ直既約＝ナル．ソノ証明＝ツイテハ、タトヘバ上記 Köthe ノ論文、或ハ（彼ノ弟子）

14. Brummund ノ Dissertation "標数 p ノ係数体ニ於ル群環ニツイテ" ヲ参照。

他方コノ場合モ $\mathfrak{m}$ ハ primitive ナ巾等元ノツクル principal ナ左いでやるニ homomorphic ニナラヌ事ハ明カ．ヨツテ 2) モ不可能．

結局矛盾ニ到達シ、A が gen. einreihig ナルコトがワカル。

次ニ上記ノ事ニ関連シタ注意ヲ一二ニ述ベル．モトモト einreihig 環ハ Köthe が単因子論ノ拡張ノ意味デ導入シタノデアッタが、彼ハ"スベテノ左マタハ右加群が cyclic ナ群ノ直和ニ分解サレル様ナ環ハ？" ト自問シタ。単ニ cyclic ナ群トイフバカリデナク、最大ナ部分群が唯一ツト云フ條件ヲツケレバ上記ノ如ク逆ノ方モ、シタがツテ問題が完全ニ我々ノ generalized "einreihig" 環デ解決サレル。（シカモ附加シタ條件ハ単因子論ノ拡張ノ上カラ見テモ不自然ノモノデハナイ）．シカシ Köthe ノ問ノマゝデハ問題ハ未ダ残ル。（特ニ可換ナ環ニノミ限レバソレハ既ニ einreihig ナ環デ解決サレテ井ルコトハ Köthe が既ニ述べテ井ル如クデアル）現ニソノ如何ナル左又ハ右加群モ cyclic ナモノノ直和ニナリ、シカモ generalized "einreihig" デナイ環が存在スル．タトヘバ

$$\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

ナル行列全体ノナス多元環ガサウデアル。（証明省略）

更ニ、上記ノ Brummund ノ論文デ標数 p ノ体ノ上デハ Cyclic デナイ p-group ハ常ニ イクラデモ大キナ直既約ナ表現ヲモツコトヲ述ベテヰル．彼ノ論法ヲツカフト、アル適當ナ primitive 巾等元 e ニ對シテ、且ツアル index i ニ對シテ $N^{i-1}e/N^{i}e$ (N ハ radical) ナル完全可約左加群ガ少クモ二ツ互ニ同型ナ単純部分加群ヲフクメバ、ソウスレバイクラデモ大キナ直既約ナ左加群ガ存在スルコトガワカル。

然ラバ、イクラデモ大キナ直既約左又ハ右加群ヲモタナイ環ノ一般ナモノハ？トイフ問題ガ起ル。上ノ條件ト generalized "einreihig" ナ條件トノ間ニハ勿論未ダ大キナ間隙ガアリ、generalized "einreihig" ナル概念ハ（上ノ Köthe ノヲサヘ解決シナイノダカラ a fortiori ニ）コノ問題ニモ未ダ無力デアル。モシコレラノコトニ関シテ何等カノ御教示ヲイタダケレバ幸甚ニ思ヒマス。